

AZ 54. – egyben 26. nemzetközi – ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2024. február 2–12.

1. A mellékelt fotó a Piskésetetői Csillagvizsgáló közelében készült napnyugta előtt. A képen számos hegycsúcs azonosítható, pl. Ágasvár, Tepke, Nagy-hegy, Csóványos, Szandavár, Szitnya stb.



Állapítsuk meg minél pontosabban a fotó segítségével a Föld sugarát, valamint a fényképezőgép tengerszint feletti magasságát, és adjuk meg a mérési bizonytalanságokat is!

Ehhez felhasználhatjuk a képen látható hegyek tengerszint feletti magasságát, valamint Piskésetetőtől és egymástól mért távolságát (ezeket pl. leolvashatjuk a kedvenc online térképünkről), hiszen ezeket a mennyiségeket kellő munkával le tudnánk mérni elemi módszerekkel (mértérúd-dal, barométerrel stb.), de ez persze nem a feladat része.

A fotó nagy felbontású verziója a következő webcímről tölthető le:

<https://ortvay.elte.hu/2024/piszkes.jpg>

(Veres Gábor és Varga Vázsony)

2. A Föld belsejében körvasutat építenek. A körpálya teljesen általános helyzetben helyezkedik el a gömb alakúnak és homogén tömegeloszlásúnak tekintett Föld belsejében. Az alagútban a vonat súrlódás nélkül, kizárólag a gravitáció hatása alatt mozog. A Föld forgásának hatásaitól eltekinthetünk.

a) Írjuk fel a pontszerű vonat pályamenti mozgásegyenletét!

b) Vizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor a körpálya a Föld egyik főkörének síkjában helyezkedik el. A vasúti kocsit a pályának a Föld középpontjától α) legtávolabbi, β) ahhoz legközelebbi pontjáról indítják, megadott kezdősebességgel.

Számítsuk ki mindkét esetben a mozgás periódusidejét a pálya adatai és a kezdősebesség függvényében!

(Cserti József)

3. A játszótereken megjelent a fényképen látható kétszemélyes hinta. A szülő a bal oldali ülésen hajtja a berendezést, mintha egyedül hintázná. A kisgyerek a jobb oldali ülésben ül. A gyerekek egy része szereti ezt a hintát, mert más élményt nyújt, mint a szokásos.



Készítsünk egyszerűsített pontmechanikai modellt a rendszerről, valósághoz közeli adatokkal! Tegyük fel, hogy a szülő hajtása a rendszerre ható periodikus forgatónyomatéknak felel meg! Szimuláljuk numerikusan a gyerek hintamozgását! Lehetséges, hogy ez a mozgás kaotikus a reális, a 90 fokosnál nem nagyobb kilengési tartományban?

(Tél Tamás, nagypapa)

4. A Piszkestetői Obszervatórium teljeségbolt-kamerája (https://www.idokep.hu/webkamera/-piszkesteto_allsky) 20 másodpercenként készít egy képet, melyek egyenként letölthetők (<https://ccdsh.konkoly.hu/share/allsky/>).

Mérjük meg ezzel a kamerával egy szabadon választott ideai műhold-átvonulás látszó pályáját, és az adatokra megfelelő függvényt illesztve határozzuk meg a műhold felszín feletti magasságát (és annak bizonytalanságát) minél pontosabban! Térjünk ki a lehetséges szisztematikus eltérésekre is!

Nagyon pontos mérés esetén a felszíni gravitációs gyorsulás ismeretében a Föld sugara is meghatározható lenne – milyen műholdat lenne érdemes ehhez választani?

A képekről mért adatok mellett a Föld adatait és egyes csillagok koordinátáit használhatjuk fel. A Földet tekinthetjük gömbszimmetrikusnak, a pályát pedig kör alakúnak, de térjünk ki az ezekből adódó bizonytalanságra! Törekedjünk arra, hogy a felszín feletti magasságnak az illesztésből adódó relatív statisztikus bizonytalansága egy százalék alatt legyen!

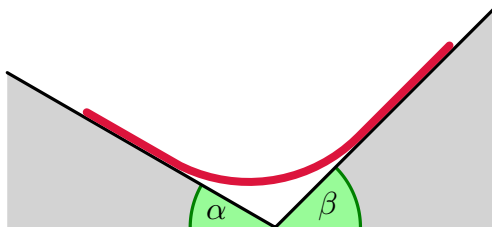
Ellenőrizzük – pl. a Heavens-Above (<https://www.heavens-above.com/AllSats.aspx>) oldalán –, hogy a vizsgált objektum valóban műhold-e, és hogy kellően kicsi-e a pályájának excentricitása!

A pixelkoordináták és horizontális koordináták közötti átváltás kalibrációjához ajánljuk segítségül a Stellarium program webes (<https://stellarium-web.org/>) vagy asztali verzióját (<http://stellarium.org/>) – ügyeljünk a megfelelő idő, időzóna és hely használatára.

A megoldási menet bemutatása és az illesztésről készült ábrák mellett adjuk meg pontosan, hogy melyik átvonulással foglalkoztunk (pl. Heavens-Above link, vagy képernyőképen jelölve a műhold).

(Varga Vázsony és Veres Gábor)

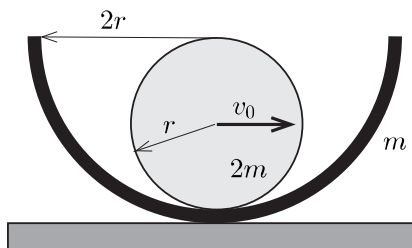
5. Két állítható dőlésszögű, összekapcsolt, merev lejtőn homogén tömegeloszlású kötélnyugszik az ábrán látható módon. A lejtők és a kötélny közti tapadási súrlódási együttható μ értékű.



Hogyan válasszuk meg az α és β dőlésszögeket, továbbá hogyan helyezzük el a kötelet ahhoz, hogy annak középső, levegőben lógó szakasza a lehető leghosszabb legyen?

(Gombkötő Ákos és Németh Róbert)

6. Egy m tömegű, $2r$ sugarú, vékony falú félcső (félhengerpalást) csúszásmentesen gördülhet egy vízszintes, sík felületen. Belsejében szintén csúszásmentesen gördülhet egy $2m$ tömegű, r sugarú, homogén tömegeloszlású henger. A $t = 0$ pillanatban a félcső nyugalomban van, a henger tengelye pedig kicsiny v_0 vízszintes sebességgel mozog.



Adjuk meg a félcső szögkitérését az idő függvényében!

(Gelencsér Jenő és Gnädig Péter)

7. Anna és Béla nagy tisztelői Eratoszthenész munkásságának, és elhatározzák, hogy megismétlik a Föld kerületének mérését. Ehhez nagyon pontosan megmérik egy-egy függőleges méterrúd árnyékának hosszát ugyanabban a pillanatban, Anna a Tolna vármegyei Nak községben, Béla pedig az ELTE Lágymányosi kampuszán, egy olyan napon, amikor a Nap Budapesten éppen 45 fokos magasságban delel. Az árnyék hosszából kiszámolják a Nap látszólagos magasságát a horizont fölött a két helyszínen, majd ezt a két szöget kivonják egymásból. A két helyszín távolságát leolvassák a térképről, ezt elosztják a fenti szögkülönbséggel, majd beszorozzák 360 fokkal, így megkapva a Föld kerületét. Megdöbbenve tapasztalják, hogy ez végtelennek adódik, tehát a Föld lapos!

Nem nyugszanak bele ebbe a furcsa eredménybe, ezért megismétlik a mérést kis idő múlva, aznap. Most 80 ezer km lett az eredmény! Arra gyanakszanak, hogy valahol elrontottak egy 2-es faktort, de ellenőrzés után rendben találják a számolásukat. Kis idő múlva megint megismétlik a mérést, és ezúttal 40 ezer km-t kapnak.

Hány órákor végezték a méréseket? (A Nap Budapesten aznap 12:39 órákor delelt.)

(Veres Gábor)

8. Egy L hosszúságú, m tömegű, hajlékony kötélen egyenes alakban nyugszik egy vízszintes felületen. A kötélen egyik végét megfogjuk, majd *lassan*, függőleges egyenes mentén emelni kezdjük. Mekkora munkát végzünk, amíg a kötélen másik vége elválik a felülettől? A kötélen és a felület közötti csúszási és tapadási együttható egyaránt $\mu = 0,3$ értékű.

(Vigh Máté)

9. Egy vízszintes síkban elhelyezkedő, igen nehéz, kör alakú abroncs egyik átmérője egy vékony, merev, $10a$ hosszúságú drótszál. Ennek a drótnak a közepére egy $4m$ tömegű átfúrt golyót helyezünk, melynek két oldalára egy-egy a nyugalmi hosszúságú, k direkciós erejű, a dróra felfűzött spirálrugót erősítünk. A rugók külső végéhez egy-egy $3m$ tömegű golyót helyezünk el. E golyókat az átmérő külső végpontjával egy-egy $4a$ hosszúságú, ám ugyancsak k direkciós erejű rugó köti össze, e rugók külső vége fixen hozzá van erősítve az átmérő végpontjához. A golyók szabadon, súrlódás nélkül mozoghatnak a drót mentén, de mindig össze vannak kapcsolva az érintkező rugókkal. A rendszert Ω szögsebességgel forgásba hozzuk az abroncs síkjára merőleges tengely körül. A golyók visszahatását a korong mozgására elhanyagolhatjuk.

Tanács: érdemes bevezetni az $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ alapfrekvenciát, valamint a $p = 12 \Omega^2 / \omega_0^2$ dimenziótlan paramétert, és ennek függvényében válaszolni az alábbi kérdésekre.

a) Hol vannak az egyes golyók stacionárius helyzetei (azaz olyan pontok, amelyekben a kerékkel együttforgó rendszerből nézve a golyók nyugalomban maradnak)?

b) Számítsuk ki a stacionárius helyzetek körüli kis rezgések frekvenciáit, és adjuk meg a megfelelő normálrezgések kitéréseit! Milyen korlátokat tudunk adni a normálrezgések amplitúdóira?

c) Vizsgáljuk meg a stacionárius helyzetek stabilitását a p paraméter függvényében!

d) Vannak-e a rendszernek zérus frekvenciájú normálrezgései és szimmetriasértő stacionárius állapotai?

e) Legyen most a p paraméter értéke $p = 23/12$. A $t < 0$ időszakban a rendszer Ω szögsebességgel forog, a golyók pedig a legkisebb frekvenciájú rezgést végzik. A $t = 0$ időpontban a rezgés épp a zérus kitérésnél tart. Ebben a pillanatban a középső golyó mozgását pillanatszerűen megállítjuk, majd a golyót elengedjük.

Adjuk meg az egyes golyók mozgását az idő függvényében!

Visszaáll-e valaha az átmérő mentén a $t = 0$ pillanatbeli állapot? Ha igen, leghamarabb mikor?

(Dávid Gyula)

10. Gumiparti csillagászok egy furcsa távoli csillag centrális erőterében mozgó bolygó hat egymást követő pozícióját figyelték meg. Az észlelések időpontját az izgatott kutatók sajnos elfelejtették feljegyezni. Később a rendszert eltakarta egy kozmikus felhő, így a megfigyelést nem lehetett folytatni.

A bolygó észlelt pozíciói pontosan illeszkedtek egy körre, amelynek a középpontja azonban nem esett egybe a centrális erőter középpontjával. A körpálya b sugara kisebb volt, mint középpontjának c távolsága az erőter centrumától.

Adjuk meg a centrális potenciál $V(r)$ képletét! Vázzuk fel a keringő bolygó pályájának korábbi és későbbi szakaszait!

(Szigorúan a klasszikus mechanika keretein belül kell dolgozni, a speciális relativitáselméletet ne vegyük figyelembe!)

(A. Tudde Mynek közleménye alapján, Port Goomy Daily Shocking Science)

11. Szuper-Galilei szabadesési kísérleteket végez: golyókat ejt le a Burdzs Kalifa torony különböző emeleti ablakaiból.

Milyen pontossággal kell megmérnie a leejtett testek zuhanási idejét, ha mérésének célja a Föld sugarának meghatározása? Milyen képletet és milyen grafikont használjon mérése kiértékeléséhez (számítógépet valamiért nem tudott szerezni)?

a) Nincs légkör. b) A levegő a zuhanó test sebességével arányos fékezőerőt fejt ki.

A Földet szabályos gömbnek tekinthetjük, forgásának hatását elhanyagolhatjuk.

(Dávid Gyula)

12. Tegyük fel újra a híres problémára vonatkozó kérdést, miszerint milyen alakú legyen egy súrlódásmentes lejtő, ha azt szeretnénk, hogy a függőleges irányú erő hatására a lejtőn csúszó, adott magasságból indított tömegpont a legrövidebb idő alatt ismét eljusson a kezdeti magasságba!

a) Keressük a lejtő alakját $y = y(x)$ alakban! Először fűszerezzük meg azzal a problémát, hogy egy szokatlan potenciállal számolunk:

$$V(y) = -\frac{a}{y^2}.$$

A testet az $x_0 = 0$ pontból indítjuk, pozitív y_0 magasságból, véges kezdősebességgel, úgy, hogy a test teljes energiája zérus legyen. A variációs számítás ismert módszereit alkalmazva keressük meg azokat a stacionárius (nulla első variációjú) pályákat, ahol a végpont $y_1 = y(x_1) = y_0$ magasságban van! Számoljuk ki a menetidőket is!

Vizsgáljuk meg a kapott megoldások stabilitását a funkcionál második variációjának a segítségével! Diszkutáljuk kvalitatíve a lehetséges megoldásokat x_1 függvényében, rögzített $y_1 = y_0$ mellett! Előfordulhat, hogy létezik olyan pályalak, amely a stacionárius variációjú megoldásnál rövidebb menetidőt ad?

b) Most induljunk ki a jó öreg gravitációs potenciálból:

$$V(y) = mgy.$$

Azokat a pályákat keressük, ahol a test az $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pontból a lehető leghamarabb eljut az (x_1, y_1) pontba, de y_1 értékét ezúttal nem rögzítjük. E peremfeltételek mellett milyen megoldásokat találunk? Mekkora az ezekhez a pályákhoz tartozó menetidő?

Vizsgáljuk a megoldások stabilitását is! Milyen érdekességet tapasztalunk?

Tipp: próbáljuk meg egy általunk választott kis $\varepsilon\eta(x)$ variáció hozzáadása után kiszámolni a menetidő megváltozását ε -ban első és másodrendben!

(Kapás Kornél)

13. Vizsgáljunk egy szabálytalan alakú merev testet (pl. egy kisbolygót) a környező égitestek inhomogén gravitációs terében! Tételezzük fel, hogy a test mérete kicsi a gravitációs tér inhomogenitására jellemző karakterisztikus hosszhoz képest!

Számítsuk ki a testre ható gravitációs erők által kifejtett forgatónyomatékokat!

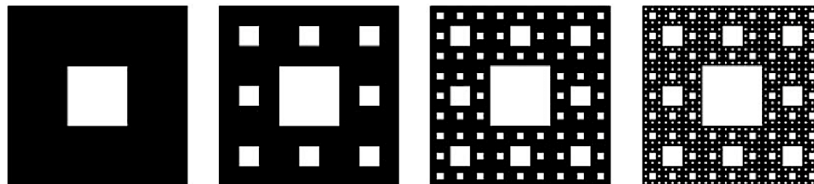
Hányféle orientációval tudjuk elhelyezni a testet a tér egy adott pontjában úgy, hogy ne hasson rá az árapályerőkből eredő forgatónyomaték? Vizsgáljuk meg a speciális degenerált eseteket is!

(Dávid Gyula)

14. Egy rögzített pozícióban nyugvó polarizálható molekulára homogén, alacsony részecskesűrűségű, v sebességű ionnyalábot bocsátunk. Az ion és a molekula közti távoli elektromágneses kölcsönhatás egy klasszikus $V(r) = -\alpha/r^4$ alakú effektív potenciállal modellezhető. Amennyiben a két részecske kellően megközelíti egymást, kémiai reakció megy végbe köztük. Számítsuk ki a reakció teljes hatáskeresztmetszetét az ionok energiájának függvényében!

(Gombkötő Ákos)

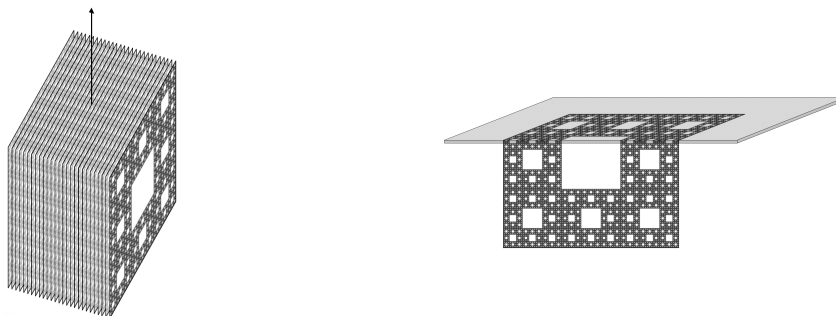
15. Sierpiński szőnyegkészítő üzemében egymás mellett lógnak a hatodik fázisban lévő Sierpiński-szőnyegek. Egy Sierpiński-szőnyeg 0. fázisában egy négyzet alakú szőnyeg. Az 1. fázisban ebből kivágnak egy négyzet alakú területet, a középső $1/9$ részét.



A szőnyegkészítés folyamatát a hatodik fázisig, lásd itt:

https://hu.wikipedia.org/wiki/Fájl:Animated_Sierpinski_carpet.gif.

a) A szorosán egymás mellett fellógatott szőnyegek közül az egyik középsőt nagyon lassan függőlegesen felfelé kihúzzuk, lásd az ábrát. A mellette lévők nem mozdulnak, de az érintkező felületekkel arányos súrlódási erővel hatnak a kihúzott szőnyegre. Mekkora munkával tudjuk a szőnyeget kiemelni, ha a szőnyeg oldalhossza L , tömege M , és a súrlódási erőt meghatározó arányossági tényező $\lambda [N/m^2]$?



b) A szőnyegek nagyon hajlékonyak. Ugyanezt a hatodik fázisú szőnyeget mennyire kell lehúzni az asztról (lásd az ábrát), hogy a lelógó rész már magával rántsa a maradékot? A szőnyeg és az asztal közötti tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,375$.

(Gáspár Merse Előd)

16. Tekintsünk egy egydimenziós golyós-rugós rendszert, amely N darab m tömegű és egy M tömegű golyóból áll, ahol $M \gg m$. A rugóállandó értéke k .

Tekintsük az M tömegű test mozgását a termodinamikai határesetben (azaz amikor $N \rightarrow \infty$) olyan időskálán, amelyre $t \gg \omega^{-1} = \sqrt{m/k}$. Ekkor az M tömegű test mozgása leírható a Langevin-egyenlettel. Határozzuk meg ezek alapján az M tömegű test γ effektív súrlódási együtthatóját. Hogyan függ a tömegek arányától a relaxációs idő, γ^{-1} és ω^{-1} hányadosa?

Írjunk egy egyszerű programot, ahol numerikusan megoldjuk a problémát különböző N értékekre, és interpretáljuk az eredményt.

(Vass Máté)

17. Egy ellipszis keresztmetszetű, n törésmutatójú üveghengerre a nagytengellyel δ szöget bezáró párhuzamos fénynyaláb esik.

a) Számítsuk ki és ábrázoljuk a megtört fénysugarak kausztikáját az üvegtömbön belül!

b) Keressük meg a beeső fénynyalábnak azt a részét, amely az üvegen belüli kausztikák kialakításában részt vesz! Adjuk meg a nyaláb ezen részének határait!

Készítsünk ábrákat, és vizsgáljuk meg a jelenséget az n törésmutató, az ellipszis ε excentricitása és a δ szög különböző értékei esetén!

Tanács: érdemes az ellipszist $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ alakban paraméterezni, a kausztikák pontjait a t paraméter függvényében megadni, valamint a nyaláb keresett részének határait is a megfelelő t értékekkel meghatározni.

(Dávid Gyula és Cserti József)

18. Megmértük egy napelemes rendszer kimenő teljesítményét Budapesten június 19-én, egy tökéletesen tiszta, felhőtlen napon (lásd az alábbi táblázatot).

Kérdés: Mennyi volt légkör által elnyelt vagy visszavert napenergia hányada deleléskor; reggel 8:00 órakor és este 19:00 órakor?

A feladat megoldásához használjuk a következő egyszerű modellt! A napelem melegebb volt, mint a környező levegő, éppen a napsütés miatt. A napelem hőmérséklete $T_p = T_a + K \cdot P$ volt, ahol T_a a levegő hőmérséklete, P a napelem pillanatnyi teljesítménye, K pedig egy állandó. A környező levegő hőmérsékletét is mértük, és azt találtuk, hogy az jól közelíthető a

$$T_a(t) = 29,1 - 0,16 \cdot (t - 14,6)^2 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

függvénnyel, ahol t a helyi időt jelöli (órában mérve), azaz a legmelegebb 14:36-kor volt.

A napelem hatásfoka (a napenergia villamos energiává alakított hányada) a hőmérséklet növekedésével $0,35 \text{ \%}/^\circ\text{C}$ mértékben csökken, tehát erre korrigálnunk kell. A napelem majdnem vízszintesen áll: a vízszintes síkhoz képest 4 fokkal dől, és a 184 fokos irányba néz (azaz a déli iránytól 4 fokkal nyugatabbra).

A Nap helyzete az égen az idő függvényében ezen a napon megtalálható az interneten, ami felhasználható ehhez a feladathoz. Vegyük figyelembe, hogy a napsugárzás intenzitása exponenciálisan csökken a levegőréteg vastagságával, amin áthatol! A K állandót úgy kell megválasztanunk (illesztenünk), hogy ez teljesüljön.

Segítség: tekintsük a különböző mennyiségeket a Nap horizont feletti magasságának függvényében! A Földet tekinthetjük laposnak.

A mért pillanatnyi teljesítmény (kW-ban) az alábbiakban látható, 07:20-tól 19:10-ig, 10 percnként (minden időt nyári zónaidőben mérünk):

	0,81	0,90	0,98	1,07	1,16	1,23	1,32	1,40	1,47	1,55	1,63	
1,70	1,76	1,83	1,89	1,94	2,00	2,04	2,10	2,15	2,17	2,23	2,28	
2,29	2,31	2,34	2,36	2,35	2,38	2,41	2,40	2,40	2,43	2,39	2,42	
2,44	2,41	2,41	2,37	2,34	2,33	2,30	2,28	2,24	2,21	2,17	2,12	
2,07	2,02	1,98	1,91	1,87	1,81	1,75	1,68	1,61	1,54	1,46	1,39	
1,32	1,24	1,16	1,07	0,99	0,90	0,82	0,73	0,65	0,55	0,47	0,39	0,31

(Veres Gábor)

19. Tekintsünk egy állandó E külső elektromos térbe helyezett kocka alakú, köbös kristályszimmetriájú, termikusan izolált dielektromos testet, melynek elektromos szuszceptibilitása kicsi ($\chi \ll 1$). A külső nyomás értéke p . Hogyan függ a kocka térfogatváltozása az elektromos tértől? Hogyan változik a kocka kezdeti T hőmérséklete? Mi a helyzet, ha a kocka vezető? Hasonlítsuk össze az eredményt az izotróp esettel!

(Vass Máté)

20. Egy űrállomás gyorsulás nélkül lebeg az űrben minden gravitációs centrumtól távol. Egy felfedezőhajó körútra indul az állomásról. A hajó pályája egzakt kör az állomás inerciarendszerében. A hajó először gyorsul, majd elérve a körút legtávolabbi pontját lassul, és zérus sebességgel érkezik vissza az állomásra. A hajó személyzete végig g nagyságú gyorsulást érzékel, ami megegyezik a Föld felszínén tapasztalható gravitációs gyorsulással.

Mennyi időbe telik a körutazás, és mennyivel öregednek a személyzet tagjai, ha a pálya sugara 10 kilométer? Es ha a sugár 10 fényév?

Írjuk fel a mozgásegyenleteket, és oldjuk meg a problémát egy pontos numerikus módszerrel!

(Bihary Zsolt)

21. A (t, x) koordinátázású kétdimenziós Minkowski-tér x -tengelye irányában egy űrhajó állandó g sajátgyorsulással mozog, ahol g megegyezik a Föld felszínén mérhető gravitációs gyorsulással. (Ez azt jelenti, hogy az űrhajósok a mozgás során állandóan a földi súlyukat érzik.)

Koordinátázzuk be az űrhajó körüli téridő minél nagyobb tartományát úgy, hogy az állandó időfelületek essenek egybe az űrhajósok pillanatnyi inerciarendszerében definiálható „most”-felületekkel, az ezeket paraméterező T időkoordináta egyezzen meg az űrhajó sajátidejével, az állandó térbeli koordinátafelületek pedig kössék össze azokat a pontokat, amelyek az űrhajó pillanatnyi inerciarendszerében egyenlő távolságra vannak az űrhajótól! Az X térbeli koordinátát válasszuk úgy, hogy az ívelemnégyzet konform Minkowski-alakú legyen!

a) Írjuk fel a (t, x) és a (T, X) koordináták közötti oda-vissza átszámítási szabályokat!

A (T, X) koordináta-rendszert egy speciális Riemann-metrikájú téridőnek tekinthetjük, és az általános relativitáselmélet módszereivel kezelhetjük.

b) Vezessük le és oldjuk meg a skalár hullámeqyenletet a (T, X) koordináta-rendszerben!

c) Írjuk fel a skalármező síkhullámok szerinti kifejtését mindkét koordináta-rendszerben! Adjuk meg a kapcsolatot a két rendszerben érvényes kifejtési együtthatók között!

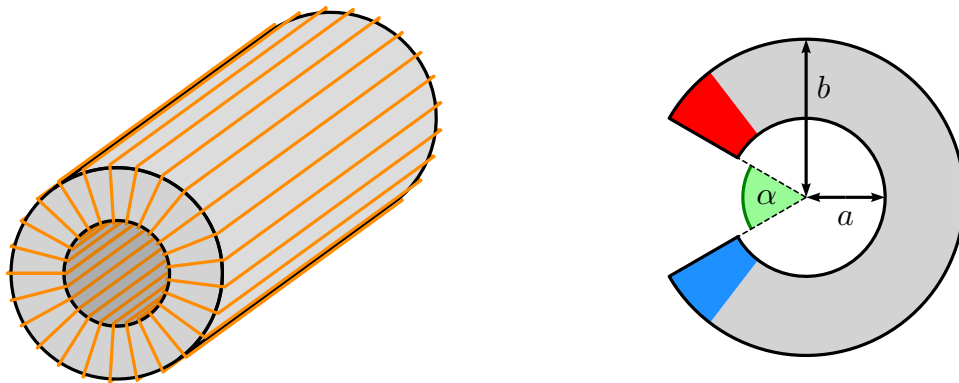
(Dávid Gyula)

22. Adott a térben egy \mathbf{r}_1 vektorral megadott középpontú, R_1 sugarú, illetve egy \mathbf{r}_2 vektorral megadott középpontú, R_2 sugarú földelt fémgömbhéj. Hol helyezkednek el azok a pontok, ahová egy ponttöltést elhelyezve a keletkező sztatikus elektromos mezőben a ponttöltésből kiinduló erővonalak fele-fele arányban érkeznek a két gömbhéjra?

A gömbhéjak paramétereire semmiféle megkötés nincsen. Azt is megengedjük, hogy bármelyik (akár mindkét) gömb „végtelen sugarú” legyen, vagyis síkká fajuljon.

(Tóth Ábel)

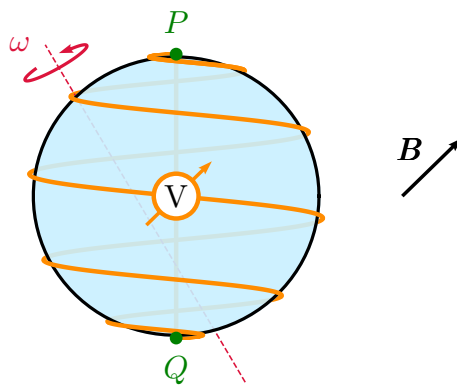
23. Egy ferromágneses anyagból készült, kezdetben mágnesezetlen hengergyűrű belső és külső sugarai rendre a és b , forgástengely irányú kiterjedése ezeknél jóval nagyobb. A testet a bal oldali ábrán látható módon egyenletesen körbetekercseljük, majd a vezetékben áramot keltve felmágnesezzük. Feltételezhetjük, hogy a folyamat végén megmaradó lokális mágnesezettség arányos az áramoknak tulajdonítható lokális mágneses térerősséggel.



Ezután a gyűrűből – a lokális mágnesezettség befolyásolása nélkül – kivágunk egy, a szimmetriatengelyről α szög alatt látszó gyűrűívet. Az így kapott rendszer, amelyet a jobb oldali ábra szemléltet, egy patkómágnes közelítő modelljének tekinthető, ha $\alpha \approx \pi$. Adjuk meg analitikusan a sztatikus mágneses mezőhöz rendelhető vektorpotenciált ebben a speciális esetben!

(Gombkötő Ákos)

24. Tetszőleges alakú, vékony drótból készült hurkot egy adott tengely körül állandó ω szögsebességgel forgatunk homogén \mathbf{B} indukciójú mágneses mezőben.
- Mekkora feszültség indukálódik a hurokban? Fejezzük ki ezt az idő függvényében, a lehető legegyszerűbb alakban!
 - Számítsuk ki a feszültség effektív értékét is! Hogyan állítsuk be a hurok, a szögsebesség és a mágneses mező irányát, hogy ez minimális, illetve maximális legyen?



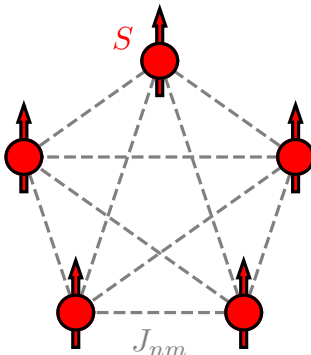
- Tekintsük az ábrán látható konkrét példát: egy R sugarú gömbre annak szemközti P és Q pontjai között felcsévélt N menetes dróthurkot, amely a két pólust egy egyenes szakasszal összekötve záródik. A menetemelkedés a PQ tengelyhez tartozó polárszögre vonatkoztatva egyenletes. Vizsgáljuk meg a b) feladatrész kérdéseit ebben a speciális esetben! Diskutáljuk a választ a menetszám függvényében!

(Németh Róbert)

25. Egy furcsa ferromágneses molekula atomjai olyan szabályos N -szög csúcaiban helyezkednek el, amelynek köréért köre R sugarú. Mindegyik atom S nagyságú, folytonosan változó irányú belső impulzusmomentummal (spinnel) rendelkezik. Ezek között Heisenberg-típusú kölcsönhatás lép fel, azaz \mathbf{r}_{nm} relatív pozíciójú \mathbf{S}_n és \mathbf{S}_m spinek kölcsönhatási energiája

$$U(\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_m) = -2J_{nm} (\mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_m), \quad \text{ahol} \quad J_{nm} = \frac{J_0 R^2}{|\mathbf{r}_{nm}|^2} > 0,$$

vagyis a kicserélődési állandó a távolság négyzetével fordítottan arányos.



Vizsgáljuk meg a molekula klasszikus dinamikáját az alábbi lépések mentén:

- Mutassuk meg, hogy a rendszernek egyensúlyi állapota minden olyan konfiguráció, ahol az összes spin azonos irányba mutat! Mit mondhatunk el ezen elrendezés stabilitásáról?
- Milyen mozgást végez a rendszer, ha a kezdetben egyirányú spineket egyensúlyi helyzetükből kis mértékben kitérítjük? Adjuk meg a partikuláris megoldásokhoz tartozó diszperziós relációt!
- Számítsuk ki a linearizált mozgásegyenletek tetszőleges kezdőfeltételhez illeszthető, általános megoldását!

(Németh Róbert)

26. Tekintsük ismét a 25. feladatban vizsgált N atomos ferromágneses molekula modelljét, ezúttal kvantummechanikai megközelítésben. A rendszer Hamilton-operátora

$$\hat{H} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \sum_{m=1}^N J_{nm} \left(\hat{S}_n^x \hat{S}_m^x + \hat{S}_n^y \hat{S}_m^y + \hat{S}_n^z \hat{S}_m^z \right),$$

ahol $\hat{S}_n^x, \hat{S}_n^y, \hat{S}_n^z$ a spinoperátor komponensei, J_{nm} pedig a korábban megadott, a távolság négyzetével fordítottan arányos kicserélődési állandó.

- Mutassuk meg, hogy a rendszernek alapállapota minden olyan állapot, amelyben az összes spinnek egy kitüntetett irányba vett vetülete egységnyi valószínűséggel S értékű. Mekkora az ehhez tartozó sajátenergia?
- Tegyük fel, hogy az n -edik atomot gerjesztjük, azaz az alapállapothoz tartozó kitüntetett spinvetületét \hbar értékkel módosítjuk. Ezt követően a molekulát magára hagyjuk, majd t idő elteltével mérjük az m -edik atom ugyanezen spinvetületét. Mekkora valószínűséggel találjuk azt gerjesztett állapotban? Mi történik a $t = \pi/J_0 S$ speciális esetben?

Útmutatás: Érdeemes először a klasszikus esetet megoldani (lásd a 25. feladatot).

(Németh Róbert)

27. Kvantummechanika órán tanuljuk, hogy bizonyos esetekben pusztán algebrai módszerekkel meg lehet határozni egy Hamilton-operátor spektrumát. A legfőbb példa erre a harmonikus oszcillátor, ahol a keltő és eltüntető operátorok algebrájából minden kiszámolható. Az elméleti fizikában ez azonban messze nem az egyetlen ilyen példa. Tekintsünk most egy másik algebrát, és próbáljuk meghatározni az alább definiált Hamilton-operátor spektrumát!

Legyenek \hat{h}_j , $j = 1, \dots, N$ hermitikus operátorok, $N \geq 1$, melyek eleget tesznek a

$$\hat{h}_j^2 = 1, \quad \text{Tr } \hat{h}_j = 0$$

feltételeknek és az alábbi felcserélési relációknak:

$$\begin{aligned} \hat{h}_j \hat{h}_{j+1} &= -\hat{h}_{j+1} \hat{h}_j \\ [\hat{h}_j, \hat{h}_k] &= 0, \quad \text{ha } |j - k| > 1. \end{aligned}$$

Legyen a Hamilton-operátor a következő:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \hat{h}_j.$$

Határozzuk meg ennek az operátornak a spektrumát! A teljes probléma kutatási szintű feladat, de bizonyos (alább részletezett) részesetek könnyebben kiszámolhatóak, foglalkozzunk ezekkel!

a) Keressünk reprezentációkat kis N -ek esetére! Milyen véges mátrixok reprezentálhatják a \hat{h}_j operátorokat $N = 1, 2, 3, 4$ esetén? Útmutatás: érdemes a Pauli mátrixokkal és azok tenzor-szorzataival dolgozni.

b) A reprezentációk megtalálása után határozzuk meg H spektrumát ezekben a reprezentációkban!

c) Most határozzuk meg a spektrumot $N = 1, 2, 3, 4$ esetére a reprezentációktól függetlenül! Feltételezhetjük, hogy az operátorok véges dimenziós téren hatnak. Bizonyítsuk be, hogy a sajátértékek halmaza nem függ a reprezentációtól, viszont a sajátértékek multiplicitása eltérhet!

(Pozsgay Balázs)

28. Szeretnénk elvégezni a szokásos EPR kísérletet spinekkel. Egy nulla spinű részecske bomlásából származó két feles spinű részecske repül ki, egy jobbra, egy balra. Ha az egyik oldalon elhelyezett spin-mérő berendezés a z -tengely mentén „fel” spinállást mér, akkor a másik oldalon a z tengely mentén bizonyosan „le” spinállást mérünk, és fordítva – a két oldal között 100 %-os a korreláció.

Csakhogy munkánkat mindkét oldalon egy-egy Gonosz Permutátor nehezíti. Sajnos csak rajtuk keresztül juthatunk hozzá a mérési adatokhoz.

A Gonosz Permutátorok (egymástól függetlenül) a következőképpen járnak el:

Fognak 5–20 darab egymás után következő mérési eredményt, gonoszul és random módon megpermutálják őket, és az adatokat csak az összes kísérlet elvégzése után küldik el nekünk. Azt, hogy mennyi adatot permutálnak meg egyszerre, szintén random módon döntenek el. Így a jobb oldalról érkező adatok nem illenek össze a bal oldalról jövő adatokkal.

Van-e esélyünk ilyen nehezített körülmények között is valahogyan kimutatni, hogy a bal és jobb oldali kísérlet eredetileg eléggé korrelált volt? Ha igen, adott mérési pontosság eléréséhez körülbelül hány mérést kell elvégeznünk?

(Egri Győző)

29. Általánosítsuk a kétdimenziós, zérus nyugalmi tömegű Dirac-egyenletet! Az (x, y) síkban mozgó Q töltésű részecske Hamilton-operátora:

$$\hat{H} = \alpha \hat{\mathbf{p}}^2 \hat{I} + \beta (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{S}})^2,$$

ahol α és β konstans paraméterek, $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ a részecske impulzusoperátora, továbbá $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ az S spinű spin-operátor \hbar egységekben ($S = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$, azaz egész vagy félegész szám), és végül \hat{I} a $(2S + 1)$ -dimenziós egységmátrix. Mivel a mozgás az (x, y) síkban történik, a \hat{p}_z komponens zérus.

Írjunk algoritmust a $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ homogén mágneses térben mozgó részecske $E_n(B)$ Landau-nívóira adott S -re! Milyen értékeket vehet fel az n index? Számítsuk ki analitikusan a Landau-nívókat az $S = 1/2, 1, 3/2, 2$ esetekben!

Ötlet: lásd a 2011. évi Ortway Rudolf problémamegoldó verseny 33. feladatát!

(Cserti József)

30. Egy kvantum részecske kvázispin-jellegű szabadsági foka miatt N komponensű hullámfüggvénnyel írható le, ennek megfelelően a rendszer $\hat{\mathbf{H}}$ Hamilton-operátora $N \times N$ -es mátrix lesz, komponenseit \hat{H}_{kl} jelöli. A $\hat{\mathbf{H}}$ Hamilton-mátrix természetesen hermitikus, ezért $\hat{H}_{kl}^\dagger = \hat{H}_{lk}$.

A kvázispin és a pályamozgás csatolása miatt a $\hat{\mathbf{H}}$ Hamilton-mátrix komponensei függenek a pályamozgásra jellemző $\hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{p}}$ hely- és impulzus-operátoroktól.

Pontosabban – mint a kísérletek gondos analízise megmutatta – a $\hat{\mathbf{H}}$ Hamilton-operátor komponensei nem külön-külön függenek a hely- és impulzusoperátoroktól, hanem csak ezek egy speciális $\hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{x}} + \alpha \hat{\mathbf{p}}$ kombinációjának függvényei: $\hat{H}_{kl}(\hat{\mathbf{c}})$. A képletben α egy (kísérletekből meghatározható) valós állandó.

Feladat: Térjünk át Heisenberg-képre! Adjuk meg az $\hat{\mathbf{p}}(t)$ impulzusoperátort az idő függvényében! Értelmezzük az eredményt!

Tanácsok:

– Első lépésként segédmenyiségként vezessük be a $\hat{\mathbf{c}}$ -től lineárisan független $\hat{\mathbf{b}} = \beta \hat{\mathbf{x}} + \gamma \hat{\mathbf{p}}$ operátorvektort! A β és γ valós együtthatókat válasszuk meg úgy, hogy a $\hat{\mathbf{c}}$ és $\hat{\mathbf{b}}$ operátorok felcserélési relációja a lehető legegyszerűbb legyen!

– Ezután számítsuk ki a $\hat{\mathbf{b}}$ operátor kommutátorát a $\hat{\mathbf{c}}$ operátor tetszőleges $f(\hat{\mathbf{c}})$ analitikus függvényével!

– A $\hat{\mathbf{G}}(t)$ időfejlesztő operátort írjuk fel a Hamilton-operátor projektorfelbontása segítségével!

(Dávid Gyula)

31. Samuel L. Braunstein és H. J. Kimble „Teleportation of Continuous Quantum Variables” címmel megjelent, kvantumteleportációval foglalkozó cikkükben John Stewart Bell egyik kvantum-információelméletben alapvető munkájára hivatkozva azt állítják, hogy az alábbi – Einstein, Rosen és Podolsky után elnevezett – a fázistéren értelmezett

$$W_{\text{EPR}}(\alpha_1; \alpha_2) = \frac{4}{\pi^2} \exp \left\{ -e^{-2r} [(x_1 - x_2)^2 + (p_1 + p_2)^2] - e^{2r} [(x_1 + x_2)^2 + (p_1 - p_2)^2] \right\},$$

függvény egy Wigner-függvény, ahol $\alpha_j = x_j + ip_j$, i a képzetes egység, valamint $r \geq 0$.

Mutassuk meg, hogy a szerzők állításával szemben az itt látható függvény nem Wigner-függvény!

(Homa Gábor)

32. Az univerzum egy távoli szegletében, a rugalmas kölcsönhatások bolygóján a tudósok régóta tudják, hogy a polgárok időfüggő pszicho-szociális kapcsolatai jól leírhatók egy Heisenberg-mozgásegyenlettel. Két, konkrét A és B egyed között a dinamikát megadó Hamilton-operátor

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{r}}^\top \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{K}^\top \cdot \hat{\mathbf{r}} + C$$

alakú, ahol

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 86 & 2 \\ -1 & 3 & -48 & -46 \\ 86 & -48 & 4588 & 496 \\ 2 & -46 & 496 & 1772 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = 5,$$

továbbá az $\hat{\mathbf{r}}$ operátor komponensei hely- és impulzus-jellegű operátorok a következő tulajdonságokkal:

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \\ \hat{p}_A \\ \hat{p}_B \end{pmatrix}, \quad [\hat{x}_m, \hat{x}_n] = 0, \quad [\hat{x}_m, \hat{p}_n] = i\delta_{mn}, \quad [\hat{p}_m, \hat{p}_n] = 0, \quad m, n = A, B.$$

a) A tudósok a gyakorlatban a \hat{H} operátor alábbi alakját használják:

$$\hat{H} = (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)^\top \cdot \mathbf{M} \cdot (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) + D.$$

Mekkora \mathbf{r}_0 és D ?

b) A bolygó népesedésének növekedésével a bolygó statisztikai hivatalának a romló gazdasági helyzet miatt egyre drágább a bináris kapcsolatok nyomkövetése. Elhatározzák, hogy egy $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}})$ transzformációval új, olcsóbb $\hat{\mathbf{s}}$ indikátorokra térnek át. A bolygó uralkodója a közjó érdekében kiköti, hogy

- Csak kanonikus transzformációt szabad alkalmazni.
- Az állami költségek csökkentésének érdekében a Hamilton-operátornak az új transzformált indikátorokkal felírt

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{s}}^\top \cdot \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{s}} + D$$

alakjában az \mathbf{N} mátrixnak diagonálisnak kell lennie.

- A régi és új indikátoroknak egymásba egyértelműen átszámolhatónak kell lenniük, ezért a \mathbf{f} leképezés invertálható kell, hogy legyen.

Adjunk meg egy konkrét kapcsolatot az \mathbf{f} leképezésre! Ha több lehetséges transzformáció is szóba jöhet, azok hogyan származtathatók az előbbi konkrét leképezésből? Mik az \mathbf{N} mátrix diagonális elemei?

(Csordás András és Homa Gábor)

\end{document}